Вторая Северо-Кавказская олимпиада интеллектуальных единоборств «Кредо – знание» – 2023

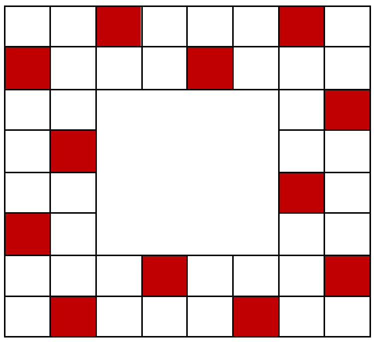
Решение задач по **математике**

Задача 1

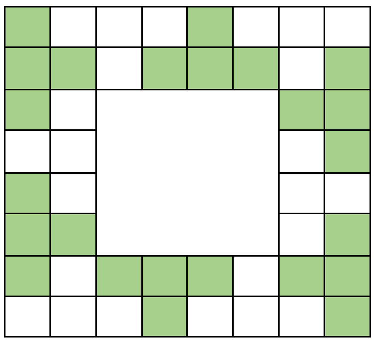
Рассмотрим белый клетчатый квадрат 8x8, из которого вырезан центральный квадрат 4x4. Оставшуюся часть назовем *кольцом.* Какое наименьшее количество белых клеток нужно перекрасить в красный цвет, чтобы каждая из оставшихся белых клеток граничила хотя бы с одной красной.

Ответ – 12

Решение. Пример на 12



Докажем, что меньше 12 нельзя. Разобьем кольцо на 12 непересекающихся частей (см. рис.). Несложно понять, что в каждой из которых должна быть хотя бы одна красная клетка. Следовательно, красных клеток не менее 12.



Задача 2

Клетчатый прямоугольник 2023×2023 как-то разбит на квадратики 20×20 и квадратики 23×23. Петя считает каждый прямоугольник 1×2, у которого одна клетка из квадратика 20×20, а вторая – из 23×23. Докажите, что Петя насчитал четное количество.

Решение

Покрасим квадратики 20×20 в красный, а квадратики 23×23 – в белый цвет. Тогда поймем, что Петя на самом деле считает границу между красными и белыми частями. Докажем, что она четная для каждой «компоненты связности» множества красных квадратиков. Под компонентой связности красных квадратиков мы будет понимать группу из нескольких (возможно одного) красных квадратиков, в которой из любого красного квадратика можно попасть в любой другой красный квадратик группы, перемещаясь по соседним (по стороне) красным клеткам. Рассмотрим одну компоненту связности красных квадратиков. Периметр каждого красного квадратика измеряется четным количеством клеток. Кроме того, часть периметра каждого красного примыкающая к границе исходного квадрата 2023x2023, а также общая граница любых двух красных квадратиков также четны. Вычитая из суммы периметров красных квадратиков длину общей границы красных квадратиков и длину общей границы красных квадратиков с исходного квадратика 2023x2023, получаем границу красных и белых квадратиков. Как разность четных величин, она будет четной. Аналогично для каждой компоненты связности красных квадратиков.

Задача 3

Пусть сумма положительных чисел a, b, c, d, e, f, g равна 1. Докажите, что

$$\frac{10+b+8c}{1+a}+\frac{20+c+8d}{1+b}+\frac{30+d+8e}{1+c}+\frac{40+e+8f}{1+d}+\frac{50+f+8g}{1+e}+\frac{60+g+8a}{1+f}+\frac{70+a+8b}{1+g} \geq \frac{2023}{8}$$

Решение

Поймем, что наибольшее из a, b, c, d, e, f, g не превосходит 1/7. Тогда

$$\frac{10+b+8c}{1+a}+\frac{20+c+8d}{1+b}+\frac{30+d+8e}{1+c}+\frac{40+e+8f}{1+d}+\frac{50+f+8g}{1+e}+\frac{60+g+8a}{1+f}+\frac{70+a+8b}{1+g} \geq$$

$$\frac{10+b+8c}{\frac{8}{7}}+\frac{20+c+8d}{\frac{8}{7}}+\frac{30+d+8e}{\frac{8}{7}}+\frac{40+e+8f}{\frac{8}{7}}+\frac{50+f+8g}{\frac{8}{7}}+\frac{60+g+8a}{\frac{8}{7}}+\frac{70+a+8b}{\frac{8}{7}} =$$

$$\frac{10+20+30+40+50+60+70+9\cdot(a+b+c+d+e+f+g)}{\frac{8}{7}} = \frac{289*7}{8} = \frac{2023}{8}.$$

Задача 4

Решите уравнение

$$\sqrt{(3x-16)(3x-24)+16} = 6x - x^2$$

Решение

Заметим, что $6x - x^2 \geq 0 \rightarrow x \in [0; 6]$. Тогда

$$\sqrt{(3x-16)(3x-24)+16} = \sqrt{9x^2-120x+400} = \sqrt{(3x-20)^2} = |3x-20| = (20-3x)$$

Таким образом,

$$20 - 3x = 6x - x^2 \rightarrow x^2 - 9x + 20 \rightarrow x = \frac{9 \pm 1}{2} \in \{4, 5\}.$$

Оба корня подходят.

Ответ -

Задача 5

Найдите площадь треугольника ABC, где $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ – это весь набор решений системы

$$\begin{cases} x^2 - 4x = y - a \\ 4x^2 - 4xy = 64 - y^2 \end{cases}.$$

Решение

Уравнение $4x^2 - 4xy = 64 - y^2$ описывает пару параллельных прямых $y = 2x - 8$ и $y = 2x + 8$. Уравнение $x^2 - 4x = y - a$ описывает параболу $y = x^2 - 4x + a$ с вершиной в точке $(2, a - 4)$. Так как решений 3, то парабола $y = x^2 - 4x + a$ пересекает дважды прямую $y = 2x + 8$ и один раз прямую $y = 2x - 8$. Следовательно, дискриминант уравнения $x^2 - 4x + a = 2x - 8$ равен нулю, получаем $4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$. Отсюда находим координаты точки A

$$x^2 - 4x + 1 = 2x - 8 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow y_1 = -2.$$

Найдем координаты точек B и C

$$x^2 - 4x + 1 = 2x + 8 \rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \rightarrow x_2 = -1, x_3 = 7 \rightarrow y_2 = 6, y_3 = 22.$$

Находим $BC = \sqrt{(-1-7)^2 + (6-22)^2} = 8\sqrt{5}$. Расстояние между прямыми $y = 2x - 8$ и $y = 2x + 8$ находим равным $16/\sqrt{5}$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна

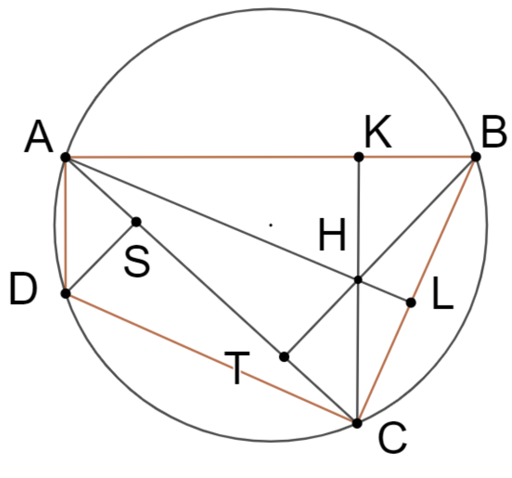
$$\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{16}{\sqrt{5}} = 64$$

Ответ – 64.

Задача 6

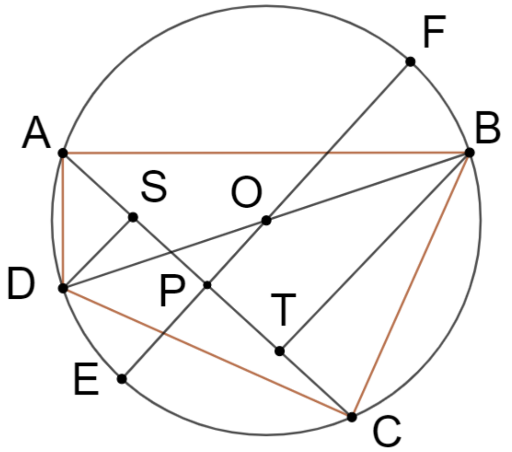
Пусть ABCD – вписанный четырехугольник и BD – диаметр. Пусть T и S – проекции, соответственно, точек B и D на AC. Докажите, что AS = CT.

Решение



Поймем, что углы A и C – прямые. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Тогда AHCD – параллелограмм. Отсюда, прямоугольные треугольники ADS и CHT равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, их соответствующие стороны AS и CT равны.

Другое решение



Пусть O – центр окружности. Тогда DO = BO. Проведем диаметр EF перпендикулярно хорде AC. Тогда AP = CP. Достаточно объяснить почему SP = PT. Для этого применим теорему Фалеса к пересекающимся прямым AC и BD. Так как DS || BT и OD = BO, то SP = PT.