

Задача 1

Рассмотрим белый клетчатый квадрат 8×8 , из которого вырезан центральный квадрат 4×4 . Оставшуюся часть назовем *кольцом*. Какое наименьшее количество белых клеток нужно перекрасить в красный цвет, чтобы каждая из оставшихся белых клеток граничила хотя бы с одной красной.

Задача 2

Клетчатый прямоугольник 2023×2023 как-то разбит на квадратики 20×20 и квадратики 23×23 . Петя считает каждый прямоугольник 1×2 , у которого одна клетка из квадратики 20×20 , а вторая – из 23×23 . Докажите, что Петя насчитал четное количество.

Задача 3

Пусть сумма положительных чисел a, b, c, d, e, f, g равна 1. Докажите, что

$$\frac{10 + b + 8c}{1 + a} + \frac{20 + c + 8d}{1 + b} + \frac{30 + d + 8e}{1 + c} + \frac{40 + e + 8f}{1 + d} + \frac{50 + f + 8g}{1 + e} + \frac{60 + g + 8a}{1 + f} + \frac{70 + a + 8b}{1 + g} \geq \frac{2023}{8}$$

Задача 4

Решите уравнение

$$\sqrt{(3x - 16)(3x - 24) + 16} = 6x - x^2$$

Задача 5

Найдите площадь треугольника ABC , где $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ – это весь набор решений системы

$$\begin{cases} x^2 - 4x = y - a \\ 4x^2 - 4xy = 64 - y^2 \end{cases}$$

Задача 6

Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник и BD – диаметр. Пусть T и S – проекции, соответственно, точек B и D на AC . Докажите, что $AS = CT$.